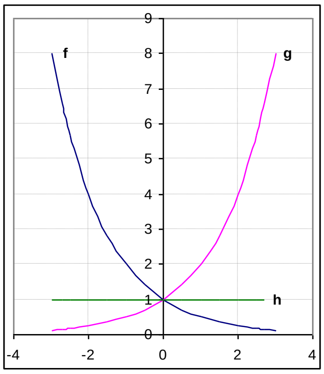
Matematica Classe:3	unità didattica:logaritmi ed esponenziali
Scheda di lavoro n.2	argomento:verso la definizione di logaritmo

- Con un foglio di calcolo o con la calcolatrice, completa la seguente tabella e rappresenta nello stesso piano cartesiano il grafico delle funzioni

Tabella2

	f	***h***	***g***
x	$y=\left(\frac{1}{2}\right)^x$	$y=1^x$	$y=2^x$
-3	8	1	1/8
-2	4	1	1/4
-1	2	1	1/2
0	1	1	1
1	1/2	1	2
2	1/4	1	4
3	1/8	1	8



Analizzando la tabella ed il grafico, completa

- La funzione ***h*** è costante ;ogni *x* ha una sola immagine , *h*(-2)=*h*(6)=*h*(0)=1 , ma non è vero che ogni y, anzi l'unico y ha una sola controimmagine, esso ne ha infinite, in quanto, ad esempio h^{-1}(1)=-2, ma h^{-1}(1)=-3, ma anche h^{-1}(1)=1 e così via…, dunque non è invertibile.
- Le funzioni ***f*** e ***g*** sono strettamente monotone, quindi invertibili. Infatti

Ogni *x* ha una sola immagine *y*,

f(-3)=8 , *f*(0)=1 *g*(-1)=0,5 , *g*(0)=1

Analogamente ogni *y* ha una sola contro immagine *x* , ad esempio

f^{-1}(4)=-2, → *-2 è l'esponente che assegno alla base* $\frac{1}{2}$ *per ottenere 4,scrivo anche* $\log_{\frac{1}{2}} 4 = -2$

$f^{-1}(\frac{1}{2})$=1 → *1 è l'esponente che assegno alla base* $\frac{1}{2}$ *per ottenere* $\frac{1}{2}$ *,scrivo anche* $\log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{2} = 1$

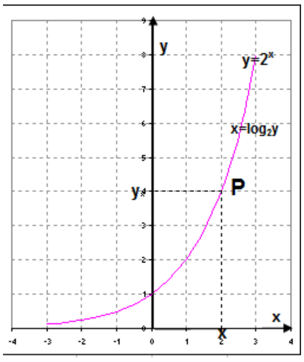
g^{-1}(4)=2 → *2 è l'esponente che assegno alla base 2 per ottenere 4,scrivo anche* $\log_2 4 = 2$

$g^{-1}(\frac{1}{2})$=-1 → *-1 è l'esponente che assegno alla base 2 per ottenere* $\frac{1}{2}$ *,scrivo anche* $\log_2 \frac{1}{2} = -1$

generalizzando : la funzione esponenziale $y=a^x$ $a \in \Re^+ \wedge a \neq 1,\ x \in \Re$ è invertibile e l'inversa è detta funzione logaritmica in base *a* e si scrive $y=a^x \Leftrightarrow x=\log_a y$ (*y*= argomento)

- Le coppie *(x,y)* che soddisfano ordinatamente l'una soddisfano anche l'altra e viceversa .

Preso ad esempio : $y = 2^x \Leftrightarrow x = \log_2 y \quad con \quad y > 0$ sostituendo nella seconda equazione la *y* della prima si ottiene l'identità $x = \log_2 2^x \quad \forall x \in R$ .Infatti *x* è l'esponente che assegno alla base 2 per ottenere l'argomento 2^x .Le due equazioni dunque rappresentano la medesima curva.



- Per non creare confusione tra il grafico della esponenziale e quello della sua inversa, la logaritmica, ed anche per poterne confrontare gli andamenti è bene riferirsi alle medesime variabili,cioè indicando con *x* la variabile indipendente e con *y* quella dipendente potendo così scrivere la funzione logaritmo nella forma $y = \log_2 x$ che si ottiene dalla $x = \log_a y$ con lo scambio reciproco delle variabili. Il diagramma della funzione logaritmica sarà deducibile da quello della esponenziale operando una simmetria rispetto alla bisettrice del primo e del terzo quadrante.

- Completare le seguenti tabelle e rappresentare le relative funzioni

Curva esponenziale e curva logaritmica di ugual base a>1

Tabella 3

x	**g:y=2^x**
-3	1/8
-2	1/4
-1	1/2
0	1
1	2
2	4
3	8

x	**f:y=$\log_2$x**
1/8	-3
1/4	-2
1/2	-1
1	0
2	1
4	2
8	3

g:y=2^x **f:y=$\log_2$x**

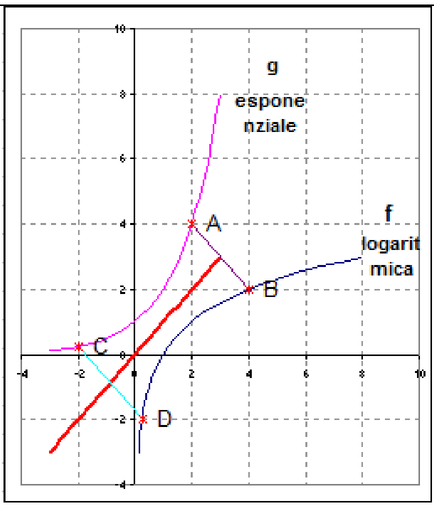
Curva esponenziale e curva logaritmica di ugual base 0<a<1

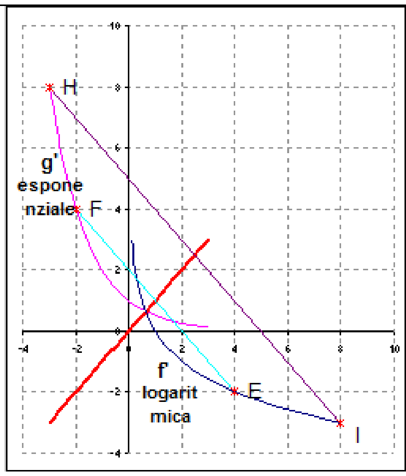
Tabella 4

x	**g':** $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$
-3	8
-2	4
-1	2
0	1
1	1/2
2	1/4
3	1/8

x	**f':** $y = \log_{\frac{1}{2}} x$
1/8	3
1/4	2
1/2	1
1	0
2	-1
4	-2
8	-3

g': $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ **f':** $y = \log_{\frac{1}{2}} x$





Dalla tabella 3)

$g(2)=4$ $f(4)=2$ $g^{-1}(4)=2$ $f^{-1}(2)=4$

ed ancora
$g(-2)=\frac{1}{4}$ $f(\frac{1}{4})=-2$ $g^{-1}(\frac{1}{4})=-2$ $f^{-1}(-2)=\frac{1}{4}$

$g(f(4))=4$ $f^{-1}(f(4))=4$

$f(g(-2))=-2$ $g^{-1}(g(-2))=-2$

le funzioni $g: y=2^x$ $f: y=\log_2 x$

sono una inversa dell'altra

Dal grafico a sx i punti:

A(2,4) e B(4,2)

C(-2, ¼) e D(¼,-2)

sono simmetrici rispetto alla bisettrice del 1° e 3° quadrante

Dalla tabella 4)

$g'(-2)=4$ $f'(4)=-2$ $g'^{-1}(4)=-2$ $f'^{-1}(-2)=4$ ed ancora

$g'(-3)=8$ $f'(8)=-3$ $g'^{-1}(8)=-3$ $f'^{-1}(-3)=8$

$g'(f'(8))=8$ $f'^{-1}(f'(8))=8$

$f'(g'(-3))=-3$ $g'^{-1}(g'(-3))=-3$

le funzioni $g': y=\left(\frac{1}{2}\right)^x$ $f': y=\log_{\frac{1}{2}} x$

sono una inversa dell'altra

Dal grafico a dx i punti
F(-2,4) e E(4,-2)

H(-3, 8) e I(8,-3)

sono simmetrici rispetto alla bisettrice del 1° e 3° quadrante,cioè rispetto alla retta $y=x$

➢