Matematica Classe:5	unità didattica:Equazioni differenziali
Esercizio n.4	argomento:eq.diff a variabili separabili

La velocità con la quale si raffredda un corpo è proporzionale alla differenza di temperatura del corpo e quella dell'ambiente circostante secondo una costante di proporzionalità. Legge di Newton(raffreddamento di un corpo)
Si prepara una tazza di cioccolata ma la temperatura è di circa 75° e quindi non è possibile berla subito. Lasciandola a temperatura ambiente (20°) e supponendo che dopo un secondo la temperatura sia diminuita di 7 °, si chiede dopo quanto tempo la temperatura sarà di 40 ° e si potrà bere.

Traccia:

Per la legge di Newton potremo scrivere, detta *T* la temperatura , $\frac{dT}{dt}$ rappresenta la rapidità di variazione di *T* $\begin{cases} \frac{dT}{dt} = k(T - 20°) \\ T(0) = 75° \end{cases}$ si ha un'equazione diff.del **primo ordine a variabili separabili,**con le C.I. Integrando

$\int \frac{dT}{k(T-20)} = \int dt \rightarrow \frac{1}{k}\ln|T-20| = t + c$ $\qquad \ln|T-20| = k(t+c)$ elevando ambo i membri ad *e* si ha $e^{\ln|T-20|} = e^{k(t+c)} \rightarrow T - 20 = c_1 e^{kt}$ quindi

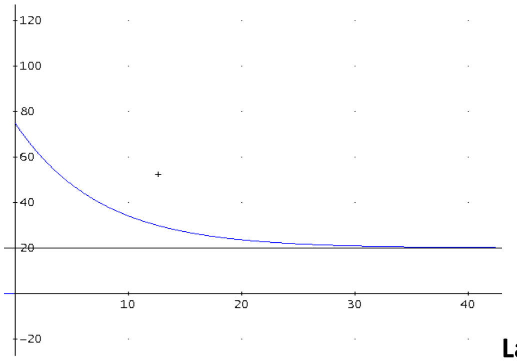
$\begin{cases} T = c_1 e^{kt} + 20 \\ T(0) = 75° \end{cases} \rightarrow c_1 = 55° \;\; Quindi \qquad \rightarrow \;\; T(t) = 55e^{Kt} + 20$ Equazione richiesta che rappresenta la variazione della temperatura. Ora per definire *k* è possibile utilizzare l'altra informazione, secondo la quale dopo un secondo la temperatura vale 68° .

Quindi sostituendo nell'equazione trovata a *t* il valore 1 avremo

$$T(1) = 55e^{k1} + 20° \rightarrow e^k = \frac{48}{55} \rightarrow k = \ln\frac{48}{55} \cong -0.136$$

E quindi $T(t) = 55e^{-0.136t} + 20$ esprime la legge con cui varia la temperatura della cioccolata. Per saper in quale istante la temperatura della cioccolata sarà di 40°, basterà calcolare

$$40 = 55e^{-0.136t} + 20 \rightarrow \frac{20}{55} = e^{-0.136t} \rightarrow \ln\frac{20}{55} = \ln(e^{-0.136t}) \rightarrow l\,n\frac{20}{55} = -0.136t \qquad t = \frac{\ln\frac{20}{55}}{-0.136} \cong 7.43$$



Il grafico rappresenta l'andamento della diminuzione della temperatura della cioccolata che tende ad abbassarsi nel tempo partendo dai 75°. Da osservare che la temperatura tende ad avvicinarsi alla temperatura ambiente che è di 20 gradi.

La velocità di disintegrazione