Matematica Classe:5	unità didattica: integrale indefinito
Esercizio n.3	argomento: primitive

Data la funzione f(x)=$\frac{1+x^2}{x^2}$, sia F(x) una primitiva che assume lo stesso valore di f(x) per x=1; in un piano cartesiano rappresentare le due curve e determinare le equazioni delle tangenti nei punti in comune.

Traccia

Considerata la funzione *f(x)*=$\frac{1+x^2}{x^2}$, per determinare una sua primitiva,basta svolgere l'operazione di integrazione, dunque calcoliamo

$\int \frac{1+x^2}{x^2}dx$ .Si tratta di una funzione con denominatore formato da un monomio ,che si può scrivere:

$\int \frac{1}{x^2}dx + \int \frac{x^2}{x^2}dx = -\frac{1}{x} + x + c$ dopo aver riconosciuto le funzioni integrabili elementarmente otteniamo così l'insieme di funzioni *F(x)+c* che costituiscono l'integrale indefinito della funzione *f(x).*

Ora vogliamo determinare quale tra queste primitive assume per x=1, lo stesso valore che assume la *f(x)* sempre per x=1. Calcoliamo quindi *f*(1)=2 , e determiniamo il valore di *c* per cui la *F(x)* quando x=1, vale 2, cioè quando *F(x)* passa per il punto P(1,2).Avremo: $2 = -\frac{1}{1} + 1 + c; \quad \to c = 2$ e la primitiva richiesta sarà $F(x) = -\frac{1}{x} + x + 2$

Ora bisogna individuare i punti di intersezione fra le due curve. Algebricamente significa determinare la soluzione del sistema formato dalle equazioni delle due curve e cioè

$\begin{cases} y = \frac{1+x^2}{x^2} \\ y = -\frac{1}{x} + x + 2 \end{cases}$ risolvendo si hanno 3 soluz. $P = \begin{cases} x = 1 \\ y = 2 \end{cases}$ $Q_{1,2} = \begin{cases} x = -1 \\ y = 2 \end{cases}$ Q ha molteplicità 2,in quanto la soluzione compare due volte

Il testo del problema ci chiede di determinare le equazioni delle tangenti nei punti in comune, dunque le equazioni delle tangenti nei punti P e Q.

Analizziamo cosa succede per la tangente in P alla primitiva *F(x).*Sappiamo che per individuare la tg in un punto di una curva basta calcolare il valore che la derivata assume in quel punto perché tale derivata coincide con il coefficiente angolare della tangente. Dunque la derivata della *F(x)* è esattamente 2 perché questo appunto il valore che la *f(x)* assume in x=1.

L'equazione della tangente in P alla *F(x)* sarà $y - 2 = 2(x-1)$ $y = 2x$ $t_1 \rightarrow$

L'equazione della tangente in Q alla *F(x)* sarà $y - 2 = 2(x+1)$ $y = 2x + 4$ $t_2 \rightarrow$

Analizziamo cosa succede per la tangente in P alla *f*(*x*). Calcoliamo la derivata della *f(x)* in P

$\left(\frac{1+x^2}{x^2}\right)' = \frac{-2}{x^3}$ è la derivata che , per x=1 , vale - 2 ; L'equazione della tangente

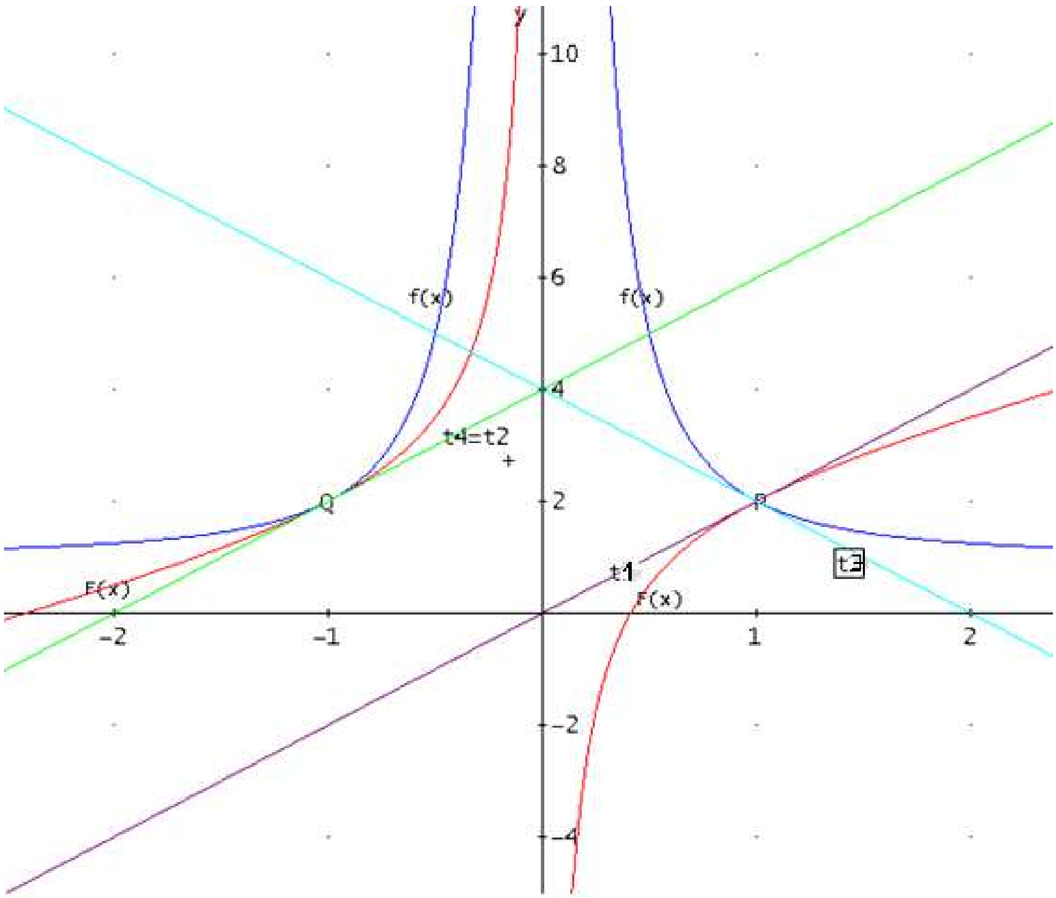
in P alla *f(x)* $y - y_0 = m(x - x_0)$ $y - 2 = -2(x-1)$ $y = -2x + 4$ $\longrightarrow$ t_3

Calcoliamo la derivata della *f(x)* in Q

$\left(\frac{1+x^2}{x^2}\right)' = \frac{-2}{x^3}$ è la derivata che per x=-1. vale 2 ; scriviamo l'equazione

della tangente in Q alla *f(x*) $y - 2 = 2(x+1)$ $y = 2x + 4$ $\longrightarrow$ t_4

Osservazioni: le tangenti t_2 e t_4 coincidono perché le due curve in Q sono tangenti ,in altre parole hanno in quel punto raccolte due intersezioni, risultato già stato trovato per via algebrica. Proprio per questo motivo avremmo potuto evitare di calcolare algebricamente la equazione della retta tangente t_4 o della t_2 in quanto,avendo trovato che in Q le due curve presentano due intersezioni coincidenti cioè due punti sovrapposti,avremmo potuto dedurre che proprio in Q le due curve sono tangenti,cioè presentano la stessa tangente.



iti
Leonardo da vinci

docente:gabriella gaggiotti