Matematica Classe:5	unità didattica: integrali definiti
Esercizio n.12	argomento:applicazione in ambito tecnico quantità di carica,valor efficace

Un filo conduttore è attraversato da una corrente alternata sinusoidale di periodo T ed intensità *i* variabile nel tempo secondo la legge $i = i_0 sin\omega t$ determinare

- la quantità di carica che fluisce attraverso una sezione del conduttore nell'intervallo di tempo$[0,\frac{T}{2}]$ e
- il valor medio in $[0,\frac{T}{2}]$
- ed il valor efficace della corrente nel periodo T= $\frac{2\pi}{\omega}$

Traccia

- Ricordando che la quantità di carica Q che fluisce attraverso una sezione S del filo conduttore nell'intervallo $[t_1,t_2]$ è $\int_{t_1}^{t_2} I(t)dt$ si ha $Q = \int_0^{\frac{T}{2}} i_0 sin\omega t\, dt = \left[-\frac{1}{\omega} i_0 cos\omega t\right]_0^{\frac{T}{2}} = \frac{2i_0}{\omega} = \frac{i_0 T}{\pi}$

è la quantità di carica cercata in $\left[0,\frac{T}{2}\right]$

- Per determinare il valor medio basta applicare il teorema della media integrale

$\int_0^{\frac{T}{2}} i_0 sin\omega t\, dt = (\frac{T}{2} - 0)\, \overbrace{i_0 e^{-k\bar{t}}}^{I(\bar{t})} \quad \rightarrow \quad I(\bar{t}) = \frac{\int_0^{\frac{T}{2}} i_0 sin\omega t dt}{(\frac{T}{2}-0)} = \frac{\frac{i_0 T}{\pi}}{(\frac{T}{2}-0)} = \frac{i_0 T}{\pi} \cdot \frac{2}{T} = \frac{2i_0}{\pi}$ che è il valor medio della intensità di corrente in $\left[0,\frac{T}{2}\right]$

- Ricordando che il valor efficace di una funzione in un intervallo[a,b] è la radice quadrata del valor medio del quadrato della f(x)in detto intervallo, si ha $I_{eff=} = \sqrt{\frac{1}{T-0}\int_0^T (i_0 sin\omega t)^2\, dt}$

  Consideriamo l'integrale nel radicando $\int_0^T (i_0 sin\omega t)^2\, dt = {i_0}^2 \int_0^T (sin\omega t)^2 dt$

  consideriamo $\int_0^T (sin\omega t)^2 dt$ ed integriamo per parti si ha :

  $\int (sin\omega t)^2 dt = sin\,\omega t \cdot \frac{-cos\omega t}{\omega} + \int (cos\omega t)^2 dt$ poiché $(cos\omega t)^2 = 1 - (sin\omega t)^2$ si ha

  $\int (sin\omega t)^2 dt = sin\,\omega t \cdot \frac{-cos\omega t}{\omega} + \int 1dt - \int (sin\omega t)^2\, dt$ e portando al primo membro si ha

  $2\int (sin\omega t)^2 dt = sin\,\omega t \cdot \frac{-cos\omega t}{\omega} + t.$

  Quindi: $\int_0^T (sin\omega t)^2 dt = \left[\frac{-sin\omega t \cdot cos\omega t + \omega t}{2\omega}\right]_0^T = \frac{-sin\omega T \cdot cos\omega T + \omega T}{2\omega}$ e poichè$T = \frac{2\pi}{\omega}$ si ha

  $\int_0^T (sin\omega t)^2 dt = = \frac{-sin\omega\frac{2\pi}{\omega} \cdot cos\omega\frac{2\pi}{\omega} + \omega\frac{2\pi}{\omega}}{2\omega} = \frac{\pi}{\omega} = \frac{T}{2}$ dunque

$$I_{eff=} = \sqrt{\frac{{i_0}^2 \frac{T}{2}}{T-0} dt} = \sqrt{\frac{{i_0}^2}{2}} = \frac{{i_0}^2}{\sqrt{2}}$$

Nota: Il valor efficace di una corrente periodica è quel particolare valore che dovrebbe assumere una corrente continua circolante nel medesimo circuito per creare nel medesimo tempo lo stesso effetto termico.