Matematica Classe:5	unità didattica: integrali definiti
Esercizio n.11	argomento:applicazione in ambito tecnico quantità di carica,valor efficace
Un filo conduttore è attraversato da una corrente di intensità *i* variabile nel tempo secondo la legge $i = i_0 e^{-kt}$ con $i_0 e$ *k* costanti; determinare • la quantità di carica che fluisce attraverso una sezione del conduttore nell'intervallo di tempo$[0, T]$ e • il valor medio • ed il valor efficace della corrente in detto intervallo.	

Traccia

- a)Ricordando che la quantità di carica Q che fluisce attraverso una sezione S del filo conduttore nell'intervallo [t_1,t_2] è $\int_{t_1}^{t_2} I(t)dt$ si ha $Q = \int_0^T i_0 e^{-kt}\,dt$ tale integrale può essere riconducibile al tipo $\int e^{f(x)} f'(x)dx = e^{f(x)}$, basta scriverlo $\frac{-i_0}{k}\int -ke^{-kt}\,dt =$ quindi

$\int_0^T i_0 e^{-kt}\,dt$ $=\left[\frac{-i_0}{k}\, e^{-kt}\right]_0^T = \frac{-i_0}{k} e^{-kT} + \frac{i_0}{k} = \frac{i_0}{k}\left(1 - e^{-kT}\right)$ è la quantità di carica cercata.

- Per determinare il valor medio basta applicare il teorema della media integrale

$\int_0^T i_0 e^{-kt}\,dt = (T-0)\,\overbrace{i_0 e^{-k\bar{t}}}^{I(\bar{t})} \quad \rightarrow \quad I(\bar{t}) = \frac{\int_0^T i_0 e^{-kt} dt}{T-0} = \frac{i_0}{kT}\left(1 - e^{-kT}\right)$ che è il valor medio della intensità di corrente in $[0, T]$

- Ricordando che il valor efficace di una funzione in un intervallo[a,b] è la radice quadrata del valor medio del quadrato della f(x)in detto intervallo, si ha

$$I_{eff=} = \sqrt{\frac{1}{T-0}\int_0^T \left(i_0 e^{-kt}\right)^2 dt}$$

Consideriamo l'integrale nel radicando

$\int_0^T \left(i_0 e^{-kt}\right)^2 dt = \frac{-1{i_0}^2}{2k}\int_0^T -2k\left(e^{-kt}\right)^2 dt = \left[\frac{-1{i_0}^2}{2k}\left(e^{-kt}\right)^2\right]_0^T = \frac{-{i_0}^2}{2k}\left(e^{-kT}\right)^2 + \frac{{i_0}^2}{2k} = \frac{{i_0}^2}{2k}\Big(1 -$ $(e{-}kT)2$ quindi $Ieff{=}i02 \quad 2kT1{-}(e{-}kT)2{=}i01{-}(e{-}kT)2 \quad 2kT$è il valor efficace richiesto.